Die Bildfehler des Toroidkondensators

Von H. Ewald und H. Liebl

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **12 a**, 28—33 [1957]; eingegangen am 7. Oktober 1956)

Die radialen und axialen Bahngleichungen von Ionenstrahlen, die in der Nähe der Mittelbahn von Toroid-Sektorkondensatoren verlaufen, werden in zweiter Näherung berechnet. Es werden die Ergebnisse für die neun auftretenden radialen Bildfehler angegeben.

In einer früheren Arbeit[1] wurden die Abbildungseigenschaften eines Toroid-Sektorkondensators in erster Näherung angegeben. Hier werden jetzt die Bahngleichungen in zweiter Näherung ermittelt und daraus die Bildfehler eines solchen Kondensators abgeleitet.

Wir betrachten einen Strahl elektrisch geladener Teilchen bestimmter Energie, der von einem Punkt eines in der Entfernung l_e' vor dem Felde befindlichen Spaltes etwa in Richtung der Mittelbahn ausgeht. Dieser Spaltpunkt habe die kleinen radialen und axialen Abstandskomponenten $y_0 = a_e\,\varrho_0$ bzw. $z_0 = a_e\,\zeta_0$ von der Mittelbahn. Für den Eintrittspunkt dieses Strahles in das Feld seien diese Komponenten $y_1 = a_e\,\varrho_1$ bzw. $z_1 = a_e\,\zeta_1$. Vor dem Felde verläuft dieser Strahl unter den kleinen Winkeln

$$\alpha_r' = \frac{a_e(\varrho_1-\varrho_0)}{l_e'} \quad \text{und} \quad \alpha_z' = \frac{a_e(\zeta_1-\zeta_0)}{l_e'} \tag{1}$$

gegen die Axialebene durch den Mittelstrahl bzw. gegen die radiale Mittelebene. Daraus folgt

$$\varrho_1 = \varrho_0 + \alpha_r'\,\frac{l_e'}{a_e} \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \zeta_0 + \alpha_z'\,\frac{l_e'}{a_e}. \tag{2}$$

Für einen Punkt innerhalb des Kondensators mit den radialen und axialen Abstandskomponenten $a_e\,\varrho$ und $a_e\,\zeta$ von der dort kreisförmigen Mittelbahn lauten die Gleichungen für die Feldstärkekomponenten[1]

$$E_r(r,z) = E_0\left\{1-(1+c)\,\varrho+\left[1+c+\frac{c^2}{2}\left(1+R_e'\right)\right]\varrho^2 - \frac{1}{2}\left[c+c^2\left(1+R_e'\right)\right]\zeta^2\ldots\right\}, \tag{3}$$

$$E_z(r,z) = E_0\left\{c\,\zeta-\left[c+c^2\left(1+R_e'\right)\right]\varrho\,\zeta\ldots\right\} \tag{4}$$

mit der Abkürzung $c = a_e/R_e$, wobei a_e und R_e die radialen bzw. axialen Krümmungsradien der durch die Mittelbahn hindurch gehenden Nullpotentialfläche bedeuten und $r = a_e(1+\varrho)$ und $R_e' = (\mathrm{d}R/\mathrm{d}r)_{r=a_e,\,z=0}$ sind. R bezeichnet den axialen Krümmungsradius einer zur Nullpotentialfläche benachbarten Äquipotentialfläche.

Für ein Teilchen einer bestimmten Masse m und der Ladung e, das sich mit der Geschwindigkeit v_0 gerade entlang der Mittelbahn bewegen kann, gilt die Bedingung

$$-a_e\,e\,E_0 = m\,v_0^2\,. \tag{5}$$

Wenn sich ein Teilchen der Masse m im Felde in der Nähe der Mittelbahn bewegt, lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\,\ddot{r} = m\,r\,\dot{\varphi}^2 + e\,E_r\,, \tag{6}$$

$$m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(r^2\,\dot{\varphi}) = 0\,, \tag{7}$$

$$m\,\ddot{z} = e\,E_z\,. \tag{8}$$

Wenn sich dieses Teilchen vor dem Felde mit der Geschwindigkeit $v = v_0(1+\beta)$ $(\beta \ll 1)$ bewegen würde, so folgte[1] aus Gl. (7) für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ seiner Bewegung innerhalb des Feldes in der Nachbarschaft der Mittelbahn

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{a_e}\left[1+\beta-2\,\varrho-2\,\varrho\,\beta+3\,\varrho^2-\varrho_1^2 + 2\,\varrho_1\,\beta-\frac{1}{2}\,\sigma_1^2+\frac{c}{2}\,(\varrho_1^2-\zeta_1^2)\right] \tag{9}$$

mit der Abkürzung $\sigma_1^2 = \alpha_r'^2 + \alpha_z'^2$.

Gl. (6) läßt sich überführen in die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 \frac{1}{\dot{\varphi}}\,\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varrho} - 1 - \varrho = \frac{1}{\dot{\varphi}^2}\,\frac{e\,E_r}{m\,a_e} \tag{10}$$

und unter Verwendung von Gl. (9) in

$$\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\varphi^2} + \varkappa^2(\varrho-\delta) = 2\left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + 2(3-c)\,\beta\,\varrho - \left[3-3\,c+\frac{c^2}{2}\left(1+R_e'\right)\right]\varrho^2 - 3\,\beta^2 - 2\,\varrho_1^2 + 4\,\varrho_1\,\beta - \sigma_1^2 + \frac{1}{2}\left[c+c^2\left(1+R_e'\right)\right]\zeta^2 + c\,(\varrho_1^2-\zeta_1^2), \tag{11}$$

[1] H. Ewald u. H. Liebl, Z. Naturforschg. **10 a**, 872 [1955].

mit den Abkürzungen

$$\varkappa^2 = 2 - c \quad \text{und} \quad \delta = 2\,\beta/\varkappa^2 . \tag{12}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung befinden sich die von zweiter Ordnung kleinen Glieder. Entsprechend läßt sich Gl. (8) umformen zu

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + c\,\zeta = 2\,c\,\beta\,\zeta - \left[3\,c - c^2\left(1 + R_e'\right)\right]\varrho\,\zeta . \tag{13}$$

Die Lösungen erster Näherung der Gln. (11) und (13), d. h. die Lösungen der homogenen Schwingungsgleichungen, die übrigbleiben, wenn man die kleinen Glieder auf den rechten Seiten vernachlässigt, lauten [1] [Gln. (14) und (15)]:

$$\varrho = \frac{a_r'}{\varkappa}\sin\varkappa\varphi + (\varrho_1 - \delta)\cos\varkappa\varphi + \delta , \tag{14}$$

$$\zeta = \frac{a_z'}{\sqrt{c}}\sin\sqrt{c}\,\varphi + \zeta_1\cos\sqrt{c}\,\varphi . \tag{15}$$

Durch Einsetzen dieser Lösungen erster Näherung in die Glieder zweiter Ordnung auf den rechten Seiten der Gl. (11) und (13) kommt man zu den inhomogenen Schwingungsgleichungen

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varkappa^2\,\varrho = f(\varphi), \tag{16}$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + c\,\zeta = g(\varphi) \tag{17}$$

mit

$$f(\varphi) = R_1\sin\varkappa\varphi + R_2\cos\varkappa\varphi + R_3\sin^2\varkappa\varphi + R_4\cos^2\varkappa\varphi + R_5\sin 2\varkappa\varphi + R_6\sin^2\sqrt{c}\,\varphi + R_7\cos^2\sqrt{c}\,\varphi + R_8\sin 2\sqrt{c}\,\varphi + R_9 \tag{18}$$

und

$$g(\varphi) = S_1\sin\sqrt{c}\,\varphi + S_2\cos\sqrt{c}\,\varphi + S_3\sin\varkappa\varphi\sin\sqrt{c}\,\varphi + S_4\sin\varkappa\varphi\cos\sqrt{c}\,\varphi + S_5\cos\varkappa\varphi\sin\sqrt{c}\,\varphi + S_6\cos\varkappa\varphi\cos\sqrt{c}\,\varphi . \tag{19}$$

Die Koeffizienten R und S ergeben sich unter Verwendung der Abkürzungen

$$A = \left[3\,c - 3 - \frac{c^2}{2}\left(1 + R_e'\right)\right], \qquad B = \left[c + c^2\left(1 + R_e'\right)\right], \qquad F = \left[-3\,c + c^2\left(1 + R_e'\right)\right] \tag{20}$$

zu

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{2}{\varkappa}\left(3 - c + \frac{2A}{\varkappa^2}\right)a_r'\,\beta, \qquad R_2 = 2\left(3 - c + \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{l_e'}{a_e}a_r'\beta - \frac{2}{\varkappa^2}\beta^2 + \beta\varrho_0\right),\\
R_3 &= \frac{A}{\varkappa^2}a_r'^2 + 2\varkappa^2\frac{l_e'^2}{a_e^2}a_r'^2 + \frac{8}{\varkappa^2}\beta^2 + 2\varkappa^2\varrho_0^2 - 8\frac{l_e'}{a_e}a_r'\beta + 4\varkappa^2\frac{l_e'}{a_e}a_r'\varrho_0 - 8\beta\varrho_0,\\
R_4 &= \left(2 + A\frac{l_e'^2}{a_e^2}\right)a_r'^2 + \frac{4A}{\varkappa^4}\beta^2 + A\varrho_0^2 - \frac{4A}{\varkappa^2}\frac{l_e'}{a_e}a_r'\beta + 2A\frac{l_e'}{a_e}a_r'\varrho_0 - \frac{4A}{\varkappa^2}\beta\varrho_0,\\
R_5 &= \varkappa\frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{A}{\varkappa^2} - 2\right)a_r'^2 + \frac{2}{\varkappa}\left(2 - \frac{A}{\varkappa^2}\right)a_r'\beta - \varkappa\left(2 - \frac{A}{\varkappa^2}\right)a_r'\varrho_0, \qquad R_6 = \frac{B}{2c}a_z'^2,\\
R_7 &= B\left(\frac{1}{2}\frac{l_e'^2}{a_e^2}a_z'^2 + \frac{l_e'}{a_e}a_z'\zeta_0 + \frac{1}{2}\zeta_0^2\right), \qquad R_8 = \frac{B}{2\sqrt{2}}\left(\frac{l_e'}{a_e}a_z'^2 + a_z'\zeta_0\right),\\
R_9 &= 2\beta - \left(1 + \varkappa^2\frac{l_e'^2}{a_e^2}\right)a_r'^2 + \left(1 + \frac{4}{\varkappa^2} + \frac{4A}{\varkappa^4}\right)\beta^2 - \left(1 + c\frac{l_e'^2}{a_e^2}\right)a_z'^2 - \varkappa^2\varrho_0^2 - c\,\zeta_0^2 + 4\frac{l_e'}{a_e}a_r'\beta\\
&\quad - 2\varkappa^2\frac{l_e'}{a_e}a_r'\varrho_0 + 4\beta\varrho_0 - 2c\frac{l_e'}{a_e}a_z'\zeta_0;
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2\sqrt{c}\left(1 + \frac{F}{c\varkappa^2}\right)\beta a_z', \qquad S_2 = 2c\left(1 + \frac{F}{c\varkappa^2}\right)\left(\frac{l_e'}{a_e}\beta a_z' + \beta\zeta_0\right), \qquad S_3 = \frac{F}{\varkappa\sqrt{c}}a_r'a_z',\\
S_4 &= \frac{F}{\varkappa}\left(\frac{l_e'}{a_e}a_r'a_z' + a_r'\zeta_0\right), \qquad S_5 = \frac{F}{\sqrt{c}}\left(\frac{l_e'}{a_e}a_r'a_z' - \frac{2}{\varkappa^2}\beta a_z' + a_z'\varrho_0\right).\\
S_6 &= F\left(\frac{l_e'^2}{a_e^2}a_r'a_z' + \frac{l_e'}{a_e}a_r'\zeta_0 - \frac{2}{\varkappa^2}\frac{l_e'}{a_e}\beta a_z' - \frac{2}{\varkappa^2}\beta\zeta_0 + \frac{l_e'}{a_e}a_z'\varrho_0 + \varrho_0\zeta_0\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Die Lösungen der Gln. (16) und (17) lauten

$$\begin{aligned}\varrho = &\left[\frac{1}{\varkappa}(1+\varrho_1)\,\alpha_{r1} + \frac{R_1}{2\varkappa^2} + \frac{2R_5}{3\varkappa^2} + \frac{2\sqrt{c}}{\varkappa}\,\frac{R_8}{5c-2}\right]\sin\varkappa\varphi + \left[\varrho_1 - \frac{2R_3}{3\varkappa^2} - \frac{R_4}{3\varkappa^2} - \frac{2cR_6}{\varkappa^2(5c-2)} - \frac{(3c-2)R_7}{\varkappa^2(5c-2)} - \frac{R_9}{\varkappa^2}\right]\cos\varkappa\varphi\\ &+ \frac{R_2}{2\varkappa}\varphi\sin\varkappa\varphi - \frac{R_1}{2\varkappa}\varphi\cos\varkappa\varphi + \frac{R_3}{3\varkappa^2}\cos^2\varkappa\varphi + \frac{R_4}{3\varkappa^2}\sin^2\varkappa\varphi - \frac{R_5}{3\varkappa^2}\sin 2\varkappa\varphi \\ &+ \frac{R_6-R_7}{2(5c-2)}\cos 2\sqrt{c}\,\varphi - \frac{R_8}{5c-2}\sin 2\sqrt{c}\,\varphi + \frac{R_3}{3\varkappa^2} + \frac{R_4}{3\varkappa^2} + \frac{R_6}{2\varkappa^2} + \frac{R_7}{2\varkappa^2} + \frac{R_9}{\varkappa^2},\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\zeta = &\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(1+\varrho_1)\,\alpha_z' + \frac{S_1}{2c} + \frac{S_4}{\varkappa\sqrt{c}}\,\frac{3c-2}{5c-2} + \frac{S_5}{5c-2}\right]\sin\sqrt{c}\,\varphi + \left[\zeta_1 - \frac{2\sqrt{c}\,S_3}{\varkappa(5c-2)} - \frac{S_6}{5c-2}\right]\cos\sqrt{c}\,\varphi\\ &+\left[\frac{S_3}{5c-2} + \frac{2\sqrt{c}\,S_6}{\varkappa(5c-2)}\right]\sin\varkappa\varphi\sin\sqrt{c}\,\varphi + \left[\frac{S_4}{5c-2} - \frac{2\sqrt{c}\,S_5}{\varkappa(5c-2)}\right]\sin\varkappa\varphi\cos\sqrt{c}\,\varphi\\ &+\left[\frac{S_5}{5c-2} - \frac{2\sqrt{c}\,S_4}{\varkappa(5c-2)}\right]\cos\varkappa\varphi\sin\sqrt{c}\,\varphi + \left[\frac{S_6}{5c-2} + \frac{2\sqrt{c}\,S_3}{\varkappa(5c-2)}\right]\cos\varkappa\varphi\cos\sqrt{c}\,\varphi\\ &- \frac{S_1}{2\sqrt{c}}\varphi\cos\sqrt{c}\,\varphi + \frac{S_2}{2\sqrt{c}}\varphi\sin\sqrt{c}\,\varphi\,.\end{aligned} \tag{24}$$

In Gl. (23) ist statt des radialen Eintrittswinkels α_r' der ein wenig davon verschiedene Winkel $\alpha_{r1} = \alpha_r' + \Delta\alpha$ eingesetzt worden. Dadurch wird der zusätzlichen schwachen Linsenwirkung des Streufeldes auf der Eintrittsseite des Feldes Rechnung getragen. Es sei vorausgesetzt, daß der Kondensator nach HERZOG [2] auf Ein- und Austrittsseite mit geerdeten Abschirmblenden versehen ist, die so dimensioniert sein sollen, daß der Mittelstrahl im wirklichen Kondensator und im gleich langen idealen Ersatzkondensator ohne Streufeld gleich stark abgelenkt wird. Seitenstrahlen mit $\varrho_1 \neq 0$ erfahren dann beim Eintritt durch die Wirkung des Streufeldes relativ zum Mittelstrahl kleine Ablenkungen $\Delta\alpha$, die klein gegen die Maximalwerte von α_r' und proportional zu ϱ_1 sind. Das hat zur Folge, daß z. B. aus einem einfallenden Parallelstrahlenbündel durch die Wirkung des Streufeldes allein ein Strahlenbüschel würde, dessen Brennpunkt in der Entfernung $f = -a_e\,\varrho_1/\Delta\alpha$ auf dem Mittelstrahl liegen würde. f ist groß gegen l_e' und a_e. HERZOG [2] hat f als Funktion der verschiedensten Blendendimensionen berechnet und in Diagrammen dargestellt. Es kann für unsere Zwecke daraus zur Berechnung von

$$\Delta\alpha = -a_e\,\varrho_1/f \tag{25}$$

entnommen werden.

Die Mitberücksichtigung dieser Knicke $\Delta\alpha$ führt, wie schon von HERZOG gezeigt, zu nicht unerheblichen Veränderungen der Bildweiten. Sie wirkt sich, wie aus dem folgenden hervorgeht, jedoch nicht auf die Bildfehler aus.

Der mittlere Ablenkwinkel des Kondensators betrage $\varphi = \Phi_e$. Ein Seitenstrahl komme unter dem kleinen Winkel α_{r2} gegen den Mittelstrahl am Austrittsende des Kondensators an. Es ist

$$\alpha_{r2} = (1-\varrho_2)\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)_{\Phi_e}. \tag{26}$$

Dieser Seitenstrahl erfährt aber bei Passieren des Austritts-Streufeldes relativ zum Mittelstrahl wiederum einen zusätzlichen kleinen Knick $\Delta\alpha = -a_e\,\varrho_2/f$, so daß der Strahl nach Verlassen des Feldes unter dem Winkel

$$\alpha_r'' = \alpha_{r2} - a_e\,\varrho_2/f \tag{27}$$

zum Mittelstrahl verläuft.

In einem rechtwinkligen (x'', y'', z'')-Koordinatensystem, dessen Ursprung mit der Austrittsstelle des Mittelstrahles und dessen x''-Achse mit dem geradlinig weiter verlaufenden Mittelstrahl zusammenfällt, während die y''-Achse in der radialen Mittelebene liegt, lauten die Geradengleichungen eines austretenden Seitenstrahles

$$y'' = a_e\,\varrho_2 + x''\,\alpha_r'', \tag{28}$$

$$z'' = a_e\,\zeta_2 + x''\,\alpha_z'' \tag{29}$$

mit

$$\alpha_z'' = (1-\varrho_2)\left(\frac{d\zeta}{d\varphi}\right)_{\Phi_e}. \tag{30}$$

[2] R. HERZOG, Phys. Z. **41**, 18 [1940].

Unter Verwendung der Gln. (21) bis (27) entstehen hieraus Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} y'' = a_e \big(&K_1 \alpha_r' + K_2 \beta + K_4 \varrho_0 + K_{11} \alpha_r'^2 + K_{22} \beta^2 + K_{33} \alpha_z'^2 + K_{44} \varrho_0^2 + K_{55} \zeta_0^2 + K_{12} \alpha_r' \beta + K_{14} \alpha_r' \varrho_0 \\ &+ K_{24} \beta \varrho_0 + K_{35} \alpha_z' \zeta_0\big) + x'' \big(L_1 \alpha_r' + L_2 \beta + L_4 \varrho_0 + L_{11} \alpha_r'^2 + L_{22} \beta^2 + L_{33} \alpha_z'^2 + L_{44} \varrho_0^2 \\ &+ L_{55} \zeta_0^2 + L_{12} \alpha_r' \beta + L_{14} \alpha_r' \varrho_0 + L_{24} \beta \varrho_0 + L_{35} \alpha_z' \zeta_0\big) , \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} z'' = a_e \big(&P_3 \alpha_z' + P_5 \zeta_0 + P_{13} \alpha_r' \alpha_z' + P_{15} \alpha_r' \zeta_0 + P_{23} \beta \alpha_z' + P_{25} \beta \zeta_0 + P_{34} \alpha_z' \varrho_0 + P_{45} \varrho_0 \zeta_0\big) \\ &+ x'' \big(Q_3 \alpha_z' + Q_5 \zeta_0 + Q_{13} \alpha_r' \alpha_z' + Q_{15} \alpha_r' \zeta_0 + Q_{23} \beta \alpha_z' + Q_{25} \beta \zeta_0 + Q_{34} \alpha_z' \varrho_0 + Q_{45} \varrho_0 \zeta_0\big) . \end{aligned} \tag{32}$$

Für die Koeffizienten K und L werden die folgenden Ausdrücke gefunden

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{l_e'}{a_e} \cos \varkappa \Phi_e + \frac{1}{\varkappa}\left(1 - \frac{l_e'}{f}\right) \sin \varkappa \Phi_e , \qquad K_2 = \frac{2}{\varkappa^2}(1 - \cos \varkappa \Phi_e) , \qquad K_4 = \cos \varkappa \Phi_e - \frac{1}{\varkappa} \frac{a_e}{f} \sin \varkappa \Phi_e ,\\
K_{11} &= \frac{1}{3\varkappa} \frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right) \sin \varkappa \Phi_e + \left[\frac{1}{3\varkappa^2}\left(1 - \frac{2A}{\varkappa^2}\right) - \frac{1}{3} \frac{l_e'^2}{a_e^2}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right)\right] \cos \varkappa \Phi_e + \frac{1}{3\varkappa^2}\left(2 + A \frac{l_e'^2}{a_e^2}\right) \sin^2 \varkappa \Phi_e \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(2 \frac{l_e'^2}{a_e^2} + \frac{A}{\varkappa^4}\right) \cos^2 \varkappa \Phi_e + \frac{1}{3\varkappa} \frac{l_e'}{a_e}\left(2 - \frac{A}{\varkappa^2}\right) \sin 2\varkappa \Phi_e + \frac{1}{3} \frac{l_e'^2}{a_e^2}\left(\frac{A}{\varkappa^2} - 1\right) - \frac{1}{3\varkappa^2} \frac{A}{3\varkappa^4} ,\\
K_{22} &= -\frac{1}{\varkappa^2}\left(1 + \frac{28}{3\varkappa^2} + \frac{16A}{3\varkappa^4}\right) \cos \varkappa \Phi_e - \frac{2}{\varkappa}\left(1 + \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{2A}{\varkappa^4}\right) \Phi_e \sin \varkappa \Phi_e \\
&\quad + \frac{4A}{3\varkappa^6} \sin^2 \varkappa \Phi_e + \frac{8}{3\varkappa^4} \cos^2 \varkappa \Phi_e + \frac{16A}{3\varkappa^6} + \frac{20}{3\varkappa^4} + \frac{1}{\varkappa^2} ,\\
K_{33} &= \frac{B}{\varkappa(5c-2)} \frac{l_e'}{a_e} \sin \varkappa \Phi_e + \frac{1}{\varkappa^2}\left[1 - \frac{B}{5c-2} + \frac{l_e'^2}{a_e^2}\left(c - \frac{B}{2} \frac{3c-2}{5c-2}\right)\right] \cos \varkappa \Phi_e \\
&\quad - \frac{B}{2\sqrt{c}(5c-2)} \frac{l_e'}{a_e} \sin 2\sqrt{c}\, \Phi_e + \frac{B}{4c(5c-2)}\left(1 - c \frac{l_e'^2}{a_e^2}\right) \cos 2\sqrt{c}\, \Phi_e + \frac{1}{\varkappa^2}\left[-1 + \frac{B}{4c} + \frac{l_e'^2}{a_e^2}\left(\frac{B}{4} - c\right)\right] ,\\
K_{44} &= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right) \cos \varkappa \Phi_e + \frac{2}{3} \cos^2 \varkappa \Phi_e + \frac{A}{3\varkappa^2} \sin^2 \varkappa \Phi_e - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{A}{\varkappa^2}\right) ,\\
K_{55} &= \left[\frac{c}{\varkappa^2} - \frac{B}{2\varkappa^2} \frac{3c-2}{5c-2}\right] \cos \varkappa \Phi_e - \frac{B}{4(5c-2)} \cos 2\sqrt{c}\, \Phi_e + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{B}{4} - c\right) ,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \frac{1}{\varkappa}\left(1 + \frac{11}{3\varkappa^2} + \frac{2A}{3\varkappa^4}\right) \sin \varkappa \Phi_e + \frac{4}{3\varkappa^2} \frac{l_e'}{a_e}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right) \cos \varkappa \Phi_e + \frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{1}{\varkappa} + \varkappa + \frac{2A}{\varkappa^3}\right) \Phi_e \sin \varkappa \Phi_e \\
&\quad - \left(1 + \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{2A}{\varkappa^4}\right) \Phi_e \cos \varkappa \Phi_e - \frac{4A}{3\varkappa^4} \frac{l_e'}{a_e} \sin^2 \varkappa \Phi_e - \frac{8}{3\varkappa^2} \frac{l_e'}{a_e} \cos^2 \varkappa \Phi_e - \frac{2}{3\varkappa^3}\left(2 - \frac{A}{\varkappa^2}\right) \sin 2\varkappa \Phi_e \\
&\quad + \frac{4}{3\varkappa^2} \frac{l_e'}{a_e}\left(1 - \frac{A}{\varkappa^2}\right) ,\\
K_{14} &= \frac{1}{3\varkappa}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right) \sin \varkappa \Phi_e - \frac{2}{3} \frac{l_e'}{a_e}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right) \cos \varkappa \Phi_e + \frac{2A}{3\varkappa^2} \frac{l_e'}{a_e} \sin^2 \varkappa \Phi_e + \frac{4}{3} \frac{l_e'}{a_e} \cos^2 \varkappa \Phi_e \\
&\quad + \frac{1}{3\varkappa}\left(2 - \frac{A}{\varkappa^2}\right) \sin 2\varkappa \Phi_e + \frac{2}{3} \frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{A}{\varkappa^2} - 1\right) ,\\
K_{24} &= \frac{4}{3\varkappa^2}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right) \cos \varkappa \Phi_e + \frac{1}{\varkappa}\left(1 + \varkappa^2 + \frac{2A}{\varkappa^2}\right) \Phi_e \sin \varkappa \Phi_e - \frac{4A}{3\varkappa^4} \sin^2 \varkappa \Phi_e - \frac{8}{3\varkappa^2} \cos^2 \varkappa \Phi_e + \frac{4}{3\varkappa^2}\left(1 - \frac{A}{\varkappa^2}\right) ,
\end{aligned}$$

$$K_{35} = \frac{B}{\varkappa(5c-2)}\sin\varkappa\Phi_e + \frac{1}{\varkappa^2}\frac{l_e'}{a_e}\left[2c - B\frac{3c-2}{5c-2}\right]\cos\varkappa\Phi_e - \frac{B}{2\sqrt{c}\,(5c-2)}\sin 2\sqrt{c}\,\Phi_e$$
$$- \frac{B}{2(5c-2)}\frac{l_e'}{a_e}\cos 2\sqrt{c}\,\Phi_e + \frac{1}{\varkappa^2}\frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{B}{2} - 2c\right); \tag{33}$$

$$L_1 = \left(-\varkappa\frac{l_e'}{a_e} - \frac{1}{\varkappa}\frac{a_e}{f}\right)\sin\varkappa\Phi_e + \left(1 - \frac{2l_e'}{f}\right)\cos\varkappa\Phi_e\,,$$

$$L_2 = \frac{2}{\varkappa}\sin\varkappa\Phi_e + \frac{2}{\varkappa^2}\frac{a_e}{f}(\cos\varkappa\Phi_e - 1)\,,\qquad L_4 = -\varkappa\sin\varkappa\Phi_e - \frac{2a_e}{f}\cos\varkappa\Phi_e\,,$$

$$L_{11} = \frac{1}{3\varkappa}\left[\frac{l_e'^2}{a_e^2}(A+\varkappa^2) + \frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right]\sin\varkappa\Phi_e + \frac{1}{3\varkappa}\left[\frac{l_e'^2}{a_e^2}\left(A - \frac{\varkappa^2}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{A}{\varkappa^2}\right]\sin 2\varkappa\Phi_e$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right)(\cos\varkappa\Phi_e - \cos 2\varkappa\Phi_e)\,,$$

$$L_{22} = \frac{1}{\varkappa}\left[-1 + \frac{10}{3\varkappa^2} + \frac{4A}{3\varkappa^4}\right]\sin\varkappa\Phi_e + \frac{2}{3\varkappa^3}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right)\sin 2\varkappa\Phi_e - 2\left(1 + \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{2A}{\varkappa^4}\right)\Phi_e\cos\varkappa\Phi_e\,,$$

$$L_{33} = \left[\frac{l_e'^2}{a_e^2}\left(\frac{B(3c-2)}{2\varkappa(5c-2)} - \frac{c}{\varkappa}\right) - \frac{1}{\varkappa} + \frac{B}{\varkappa(5c-2)}\right]\sin\varkappa\Phi_e$$
$$+ \frac{B}{5c-2}\frac{l_e'}{a_e}(\cos\varkappa\Phi_e - \cos 2\sqrt{c}\,\Phi_e) + \frac{B\sqrt{c}}{2(5c-2)}\left(\frac{l_e'^2}{a_e^2} - \frac{1}{c}\right)\sin 2\sqrt{c}\,\Phi_e\,,$$

$$L_{44} = \frac{\varkappa}{3}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right)\sin\varkappa\Phi_e + \frac{\varkappa}{3}\left[\frac{A}{\varkappa^2} - \frac{1}{2}\right]\sin 2\varkappa\Phi_e\,, \tag{34}$$

$$L_{55} = \frac{1}{2\varkappa}\left[B\frac{3c-2}{5c-2} - 2c\right]\sin\varkappa\Phi_e + \frac{B\sqrt{c}}{2(5c-2)}\sin 2\sqrt{c}\,\Phi_e\,,$$

$$L_{12} = \frac{1}{\varkappa}\frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{5}{3} + \varkappa^2 + \frac{2A}{3\varkappa^2}\right)\sin\varkappa\Phi_e + \frac{2}{3\varkappa^2}\left(1 - \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa\Phi_e + \frac{l_e'}{a_e}\left(1 + \varkappa^2 + \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\Phi_e\cos\varkappa\Phi_e$$
$$+ \left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa} + \frac{2A}{\varkappa^3}\right)\Phi_e\sin\varkappa\Phi_e + \frac{2}{3\varkappa}\frac{l_e'}{a_e}\left(1 - \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\sin 2\varkappa\Phi_e + \frac{2}{3\varkappa^2}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right)\cos 2\varkappa\Phi_e\,,$$

$$L_{14} = \frac{2}{3}\varkappa\frac{l_e'}{a_e}\left(1 + \frac{A}{\varkappa^2}\right)\sin\varkappa\Phi_e + \frac{1}{3}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right)\cos\varkappa\Phi_e + \frac{\varkappa}{3}\frac{l_e'}{a_e}\left(\frac{2A}{\varkappa^2} - 1\right)\sin 2\varkappa\Phi_e + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\cos 2\varkappa\Phi_e\,,$$

$$L_{24} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{5}{3} + \varkappa^2 + \frac{2A}{3\varkappa^2}\right)\sin\varkappa\Phi_e + \left(1 + \varkappa^2 + \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\Phi_e\cos\varkappa\Phi_e + \frac{2}{3\varkappa}\left(1 - \frac{2A}{\varkappa^2}\right)\sin 2\varkappa\Phi_e\,,$$

$$L_{35} = \frac{1}{\varkappa}\frac{l_e'}{a_e}\left[B\frac{3c-2}{5c-2} - 2c\right]\sin\varkappa\Phi_e + \frac{B}{5c-2}\cos\varkappa\Phi_e + \frac{B\sqrt{c}}{5c-2}\frac{l_e'}{a_e}\sin 2\sqrt{c}\,\Phi_e - \frac{B}{5c-2}\cos 2\sqrt{c}\,\Phi_e\,.$$

Speziell für $c = 0$ (Zylinderkondensator), und für $l_e' = g_{re} = (a_e/\sqrt{2})\cdot\mathrm{ctg}\,\sqrt{2}\,\Phi_e$ und unter Vernachlässigung der Streufeldwirkung vereinfachen sich die Ausdrücke für K_1, K_2, K_{11}, K_{22}, K_{12}, L_1, L_2, L_{11}, L_{22}, L_{12} zu denen, die von HINTENBERGER, WENDE und KÖNIG [3] für den Zylinderkondensator angegeben worden sind.

Von den Koeffizienten P und Q sollen hier nur jeweils die ersten beiden angegeben werden. Die übrigen, die für die Größen der axialen Bildfehler maßgeblich sind, sind für die Verwendung von Toroidkondensatoren z. B. bei Massenspektrogra-

[3] H. HINTENBERGER, H. WENDE u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforschg. **10 a**, 605 [1955].

phen weniger wichtig, weil die entsprechenden Bildverbreiterungen in die Richtung der Spektrallinien fallen. Es ist

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}\, \Phi_e + \frac{l_e'}{a_e} \cos \sqrt{c}\, \Phi_e , \\ P_5 &= \cos \sqrt{c}\, \Phi_e , \\ Q_3 &= -\sqrt{c}\, \frac{l_e'}{a_e} \sin \sqrt{c}\, \Phi_e + \cos \sqrt{c}\, \Phi_e , \\ Q_5 &= -\sqrt{c} \sin \sqrt{c}\, \Phi_e . \end{aligned} \tag{35}$$

Die radialen und axialen Bildweiten $x'' = l_{re}''$ bzw. $x'' = l_{ze}''$ ergeben sich, wenn man in den Gln. (31) und (32) jeweils die Summe der mit α_r' bzw. α_z' multiplizierten Glieder gleich Null setzt:

$$a_e K_1 + l_{re}'' L_1 = 0 ,$$
$$a_e P_3 + l_{ze}'' Q_3 = 0 .$$

Nach Einsetzen von K_1, L_1, P_3, Q_3 folgen hieraus durch einfache Umformungen die Linsengleichungen

$$\left[l_e' - g_{re} \left(1 - \frac{2 l_e'}{f} \right) + \frac{a_e^2}{f \varkappa^2} \right] \left[l_{re}'' - g_{re} \right] = f_{re}^2 - \frac{l_e'}{f} \left(2 g_{re}^2 + \frac{a_e^2}{\varkappa^2} + \frac{a_e^2}{\varkappa^2} \frac{g_{re}}{l_e'} \right), \tag{36}$$

$$\left[l_e' - g_{ze} \right] \left[l_{ze}'' - g_{ze} \right] = f_{ze}^2 , \tag{37}$$

wobei

$$g_{re} = \frac{a_e}{\varkappa} \operatorname{ctg} \varkappa\, \Phi_e \quad \text{und} \quad g_{ze} = \frac{a_e}{\sqrt{c}} \operatorname{ctg} \sqrt{c}\, \Phi_e$$

die radialen bzw. axialen Brennpunktsabstände und

$$f_{re} = \frac{a_e}{\varkappa \sin \varkappa\, \Phi_e} \quad \text{und} \quad f_{ze} = \frac{a_e}{\sqrt{c} \sin \sqrt{c}\, \Phi_e}$$

die entsprechenden Brennweiten bedeuten, die sich für das ideale Feld ohne Berücksichtigung der Streufeldwirkung ergeben.

Gln. (36) und (37) können zur Berechnung der Bildweiten l_{re}'' und l_{ze}'' von Toroidkondensatoren verwendet werden.

Für den früher [1] untersuchten Kondensator mit $a_e = 12$ cm, $R_e = 9{,}6$ cm, $l_e' = 81$ cm ist [2] $f = -1260$ cm und damit ergibt sich nach Gl. (36) $l_{re}'' = 52{,}0$ cm, in guter Übereinstimmung mit dem ungefähren experimentellen Ergebnis $l_{re}'' = 54$ cm. Ließe man die Streufeldwirkung außer Acht ($f = \infty$), würde sich $l_{re}'' = 48{,}4$ cm ergeben.

Die 9 an der Stelle $x'' = l_{re}''$ auftretenden radialen Bildfehler sind durch die folgenden Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} F_{11} &= (a_e K_{11} + l_{re}'' L_{11})\, \alpha_r'^2 , \\ F_{22} &= (a_e K_{22} + l_{re}'' L_{22})\, \beta^2 , \\ F_{33} &= (a_e K_{33} + l_{re}'' L_{33})\, \alpha_z'^2 , \\ F_{44} &= (a_e K_{44} + l_{re}'' L_{44})\, \varrho_0^2 , \\ F_{55} &= (a_e K_{55} + l_{re}'' L_{55})\, \zeta_0^2 , \\ F_{12} &= (a_e K_{12} + l_{re}'' L_{12})\, \alpha_r' \beta , \\ F_{14} &= (a_e K_{14} + l_{re}'' L_{14})\, \alpha_r' \varrho_0 , \\ F_{24} &= (a_e K_{24} + l_{re}'' L_{24})\, \beta\, \varrho_0 , \\ F_{35} &= (a_e K_{35} + l_{re}'' L_{35})\, \alpha_z' \zeta_0 . \end{aligned}$$

Die hier gefundenen Ergebnisse finden in einer in Kürze folgenden Arbeit über Berechnungen zum Bau von stigmatisch abbildenden Massenspektrographen [4], die radiale Doppelfokussierung in zweiter Näherung ergeben sollen, Verwendung.

[4] H. Ewald u. G. Sauermann, Z. Naturforschg. **11 a**, 173 [1956].